
Численное интегрирование в ограниченной задаче трёх тел

Создание инструмента для изучения движения тела в
системе Земля-Луна



Олимпиада Старт в науку
МФТИ, 2026

Ключников Александр

Научный руководитель
Бабинцев В.А., доцент каф. общей физики МФТИ

Введение в тему

Задача трёх тел

Классическая задача небесной механики.

Аналитического решения не существует

КОЗТТ

Два массивных тела движутся по окружности.

Третье тело — малой массы

Вращающаяся система

Земля и Луна неподвижны.

Появляются ускорение Кориолиса и центробежное

Круговая ограниченная задача трёх тел — базовая модель для изучения динамики в системе Земля–Луна

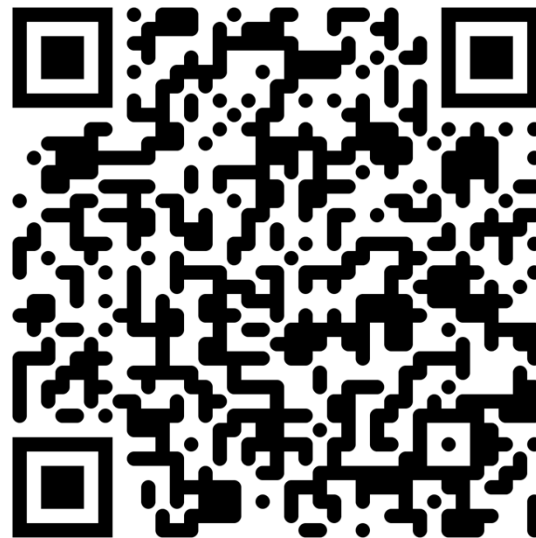
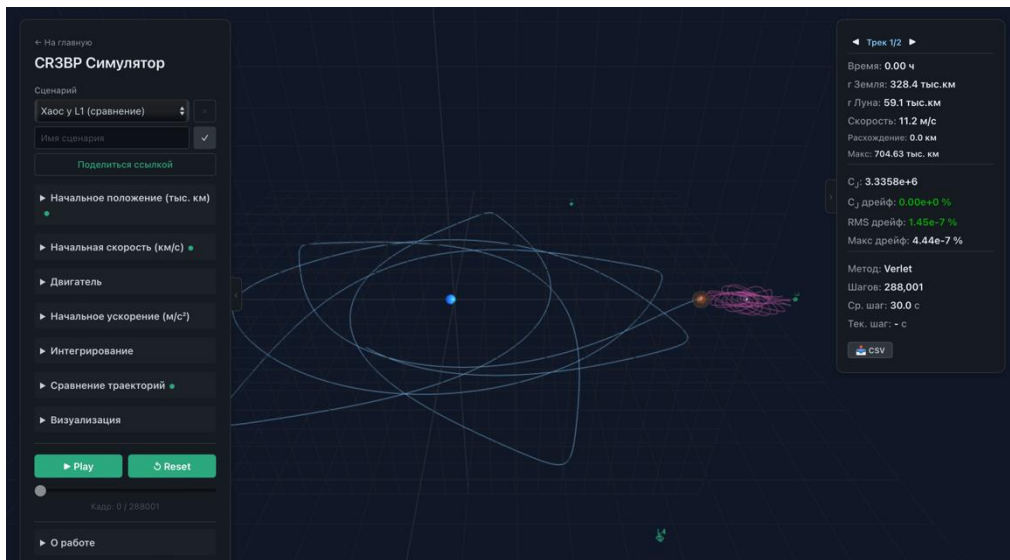
Актуальность и аналоги

КОЗТТ — базовая модель динамики Земля–Луна. Аналитического решения не существует

Инструмент	КОЗТТ	3D	Тяга	Якоби	Веб
GMAT (NASA)	●	●	●	—	—
STK (Ansys/AGI)	—	●	●	—	—
Universe Sandbox	—	●	●	—	—
PhET Simulations	—	—	—	—	●
Desmos	—	—	—	—	●
«Орбита. Челлендж»	—	●	—	—	●
rocketlauncher.space	●	●	●	●	●

Я искал готовый симулятор — и не нашёл

<https://rocketlauncher.space>



- 3D визуализация системы Земля–Луна
- Двигатель с настройкой окна тяги
- Три интегратора с контролем Якоби
- Точки Лагранжа L1–L5

Цели и задачи

Создание обучающего веб-симулятора траекторий в системе Земля–Луна

- 1 Изучить теоретические основы КОЗТТ
- 2 Вывести уравнения движения во вращающейся системе координат
- 3 Реализовать расчёт траектории методом Эйлера

- 4 Реализовать метод Верле, сравнить точность с Эйлером
- 5 Численно найти точки Лагранжа L1–L5
- 6 Создать интерактивный 3D веб-симулятор

Математическая модель

Уравнения движения во вращающейся системе координат:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2\omega\dot{y} + \omega^2x - \frac{GM_E(x + d_E)}{r_E^3} - \frac{GM_M(x - d_M)}{r_M^3} + \frac{F_x}{m} \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x} + \omega^2y - \frac{GM_E \cdot y}{r_E^3} - \frac{GM_M \cdot y}{r_M^3} + \frac{F_y}{m} \\ \ddot{z} &= -\frac{GM_E \cdot z}{r_E^3} - \frac{GM_M \cdot z}{r_M^3} + \frac{F_z}{m}\end{aligned}$$

G

грав. постоянная

M_e, M_m

массы тел

d_e, d_m

от барицентра

r_e, r_m

до центров масс

ω

угл. скорость

m = M - λt

масса топлива

2ω \dot{y} и -2ω \dot{x} — ускорение от силы Кориолиса. Зависит от скорости

+ модель тяги: $F = const$ в окне $[t_{on}, t_{off}]$

Область применимости

01

Круговая орбита

Орбита Луны считается
круговой
(реальный эксцентриситет =
0.055)

02

Малая масса КА

Масса аппарата
пренебрежимо мала
по сравнению с Землёй и
Луной

03

Без Солнца

Не учитывается притяжение
Солнца и других тел

Модель корректна для качественного
изучения динамики и учебных целей

Для реальных миссий используются
полные эфемеридные модели

Три интегратора

Метод Эйлера

Простой, порядок $O(h)$

Не сохраняет энергию

$O(h)$

Верле с явной обработкой Кор. члена

Симплектический, $O(h^2)$ теор

Но Кориолис все портит

Деградация до $O(h)$ в КОЗТТ

$O(h)$ в КОЗТТ

Верле с итеративной коррекцией скорости

3 итерации за шаг уточняют v

Восстанавливает порядок

$O(h^2)$

$O(h^2)$

Кориолисово ускорение $2\omega \times v$ зависит от скорости \rightarrow Верле с явной обработкой Кориолисова члена теряет порядок \rightarrow итерации восстанавливают $O(h^2)$

Интеграл Якоби

Единственная сохраняющаяся величина в КОЗТТ

$$C_J = 2U - V^2$$

$e = \frac{C_J(t) - C_J(0)}{C_J(0)}$ — мера накопленной ошибки

< 0.001%

Отлично

< 0.01%

Хорошо

< 0.1%

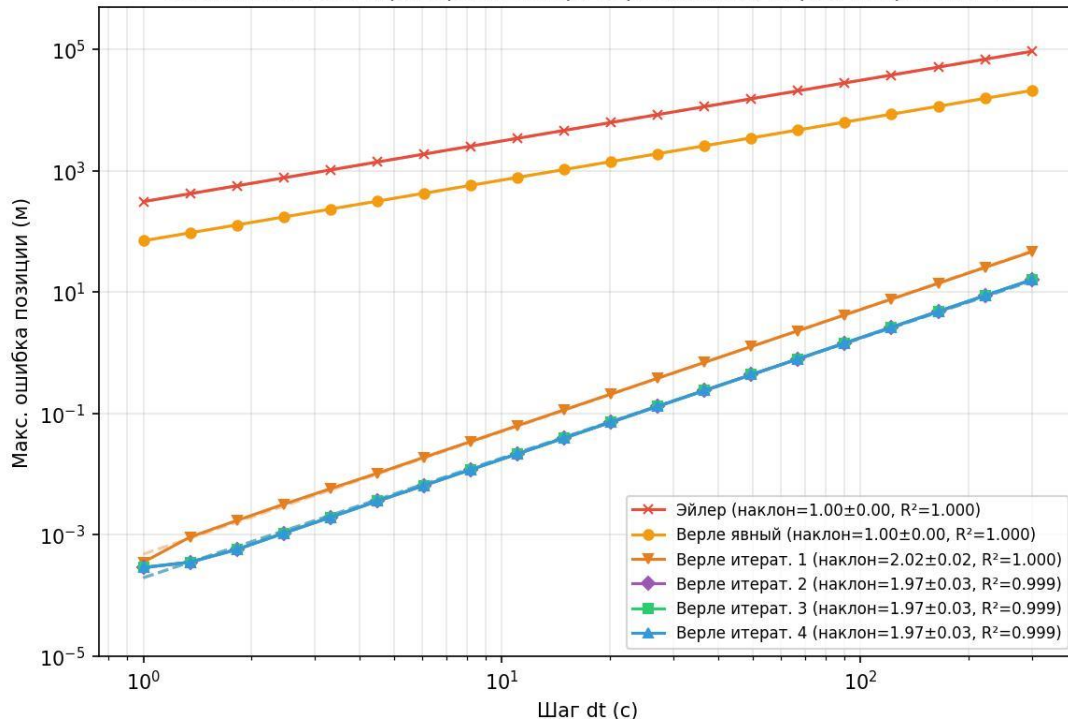
Допустимо

> 0.1%

Плохо

Log-log сходимость

Сходимость интеграторов: Эйлер, Верле явный, Верле итерат. (1-4)



Эйлер

наклон 1.00 $\rightarrow \mathcal{O}(h)$

Верле явный

наклон 1.00 $\rightarrow \mathcal{O}(h)$

Верле итеративный

наклон 1.97 $\rightarrow \mathcal{O}(h^2)$

dt = 30 с | $R^2 = 0.999$

Эйлер: 8 400 м

Верле явн.: 1 900 м

Верле итерат.: 0.13 м

64 600× точнее по позиции

Адаптивный шаг

Вблизи тел $1/r$ растёт → нужен мелкий шаг

$$dt = \frac{dt_{\max}}{1 + \frac{v}{v_{\text{ref}}} \left(\frac{dt_{\max}}{dt_{\min}} - 1 \right)}$$

Далеко от тел

$$dt = dt_{\max}$$

Силы малы, шаг максимален



Переходная зона

dt уменьшается

пропорционально v



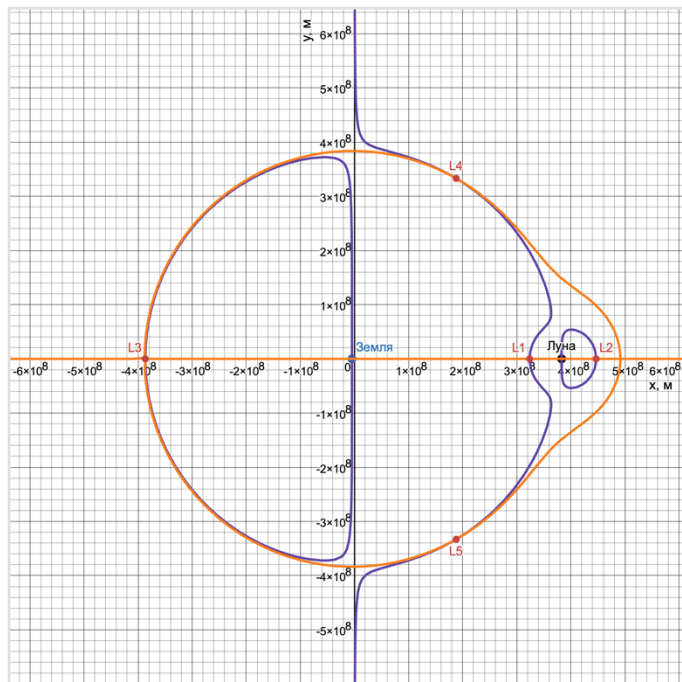
Вблизи тела

$$dt \approx dt_{\min}$$

Силы велики, шаг минимален

Поиск точек Лагранжа: Desmos

Графический анализ суммарного ускорения в Desmos



$$\omega^2 x - \frac{GM_E(x+d_E)}{((x+d_E)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{GM_M(x-d_M)}{((x-d_M)^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

$$y \cdot \left(\frac{GM_E}{((x+d_E)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{GM_M}{((x-d_M)^2+y^2)^{3/2}} - \omega^2 \right) = 0$$

$$z = 0$$

От графика к алгоритму

Графическое исследование привело к формализации метода бисекции для автоматического поиска точек Лагранжа

Точки Лагранжа L1–L5

5 точек равновесия системы Земля–Луна

Точка	x, км	y, км	Метод	Ост. ускор., м/с ²
L1	323 696	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L2	446 531	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L3	-386 651	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L4	188 081	332 925	Ньютон	$< 10^{-18}$
L5	188 081	-332 925	Ньютон	$< 10^{-18}$

График в Desmos → смена знака → бисекция → точность $< 10^{-18}$ м/с²

Аналитические приближения (сфера Хилла) дают отн. ошибку 0.4–0.8% — численное решение точнее

Личный вклад

Физика

Вывод уравнений движения КОЗТТ во вращающейся системе координат

Валидация

Реализация интеграла Якоби как инструмента проверки точности

Числ. методы

3 интегратора; обнаружение деградации Верле и реализация варианта с итеративной коррекцией скорости

Эксперименты

Серия из 7 вычислительных экспериментов для количественной верификации

Алгоритмы

Нахождение точек Лагранжа L1–L5: бисекция + метод Ньютона

Разработка

3D веб-симулятор + скрипты поиска начальных условий

Пути развития

Эллиптическая орбита

Учёт эксцентриситета Луны

Гравитация Солнца

Расширение до задачи
четырёх тел

Давление света

Учет давления света от
Солнца

Удержание орбиты

Поддержание аппарата
вблизи гало-орбиты

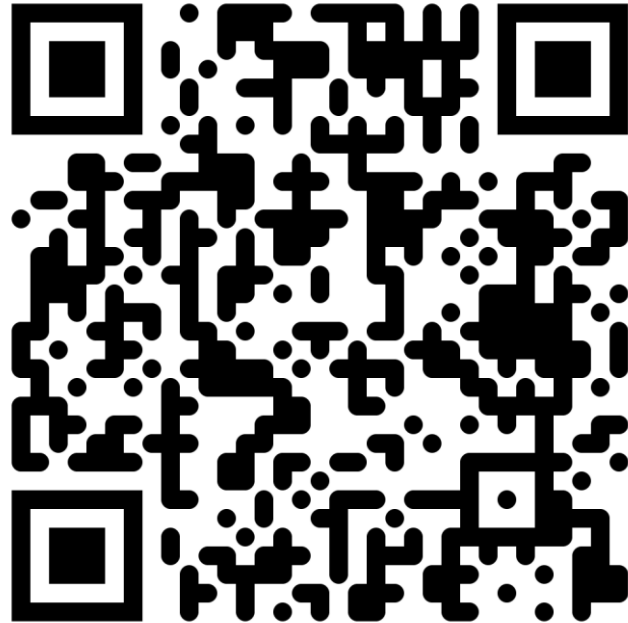
Лабораторные работы

Набор заданий на базе симулятора

Выводы

- ✓ Изучены теоретические основы КОЗТТ, выведены уравнения движения
- ✓ Реализованы 3 интегратора. Верле с итеративной коррекцией скорости точнее Эйлера в 64 600x
- ✓ Точки Лагранжа L1–L5 найдены численно (ост. уск. $< 10^{-18}$)
- ✓ Модель верифицирована серией из 7 численных экспериментов
- ✓ Создан обучающий 3D веб-симулятор, опубликован онлайн

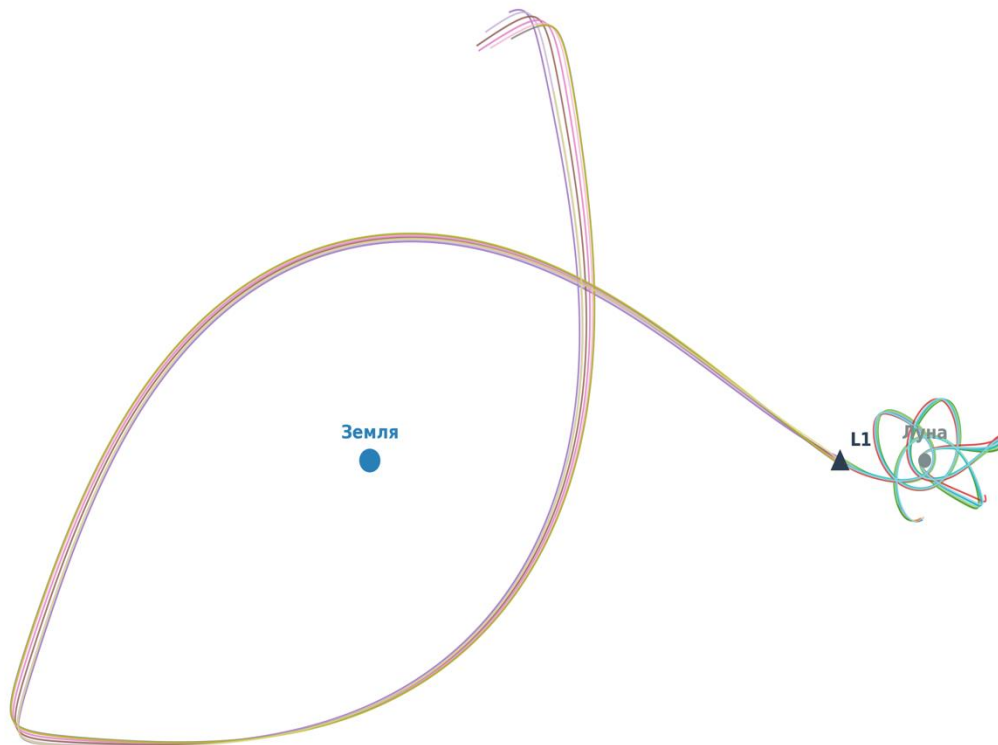
Спасибо за внимание



Приложение

Дополнительные материалы для ответов на вопросы

Хаос у L1



Δv_0

10 м/с

Показатель Ляпунова λ

0.64 сут⁻¹

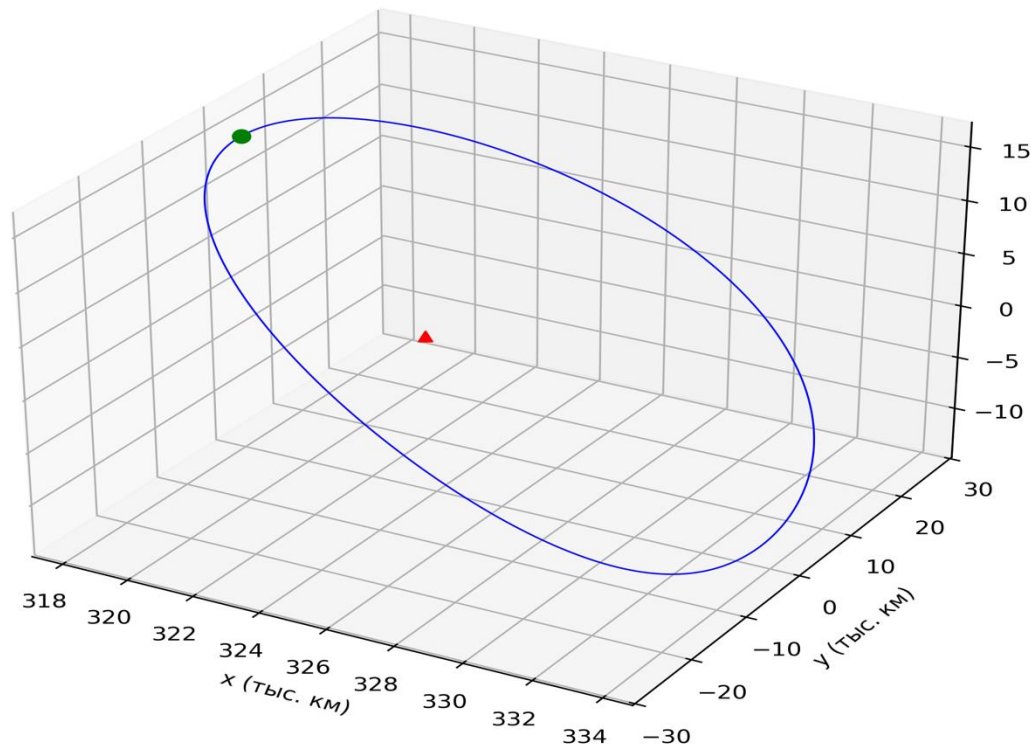
Горизонт предсказуемости

~2 суток

Направлений / время

16 / 30 сут

Гало-орбита L1



Амплитуда Az

15 000 км

Период

293 ч (12.2 дня)

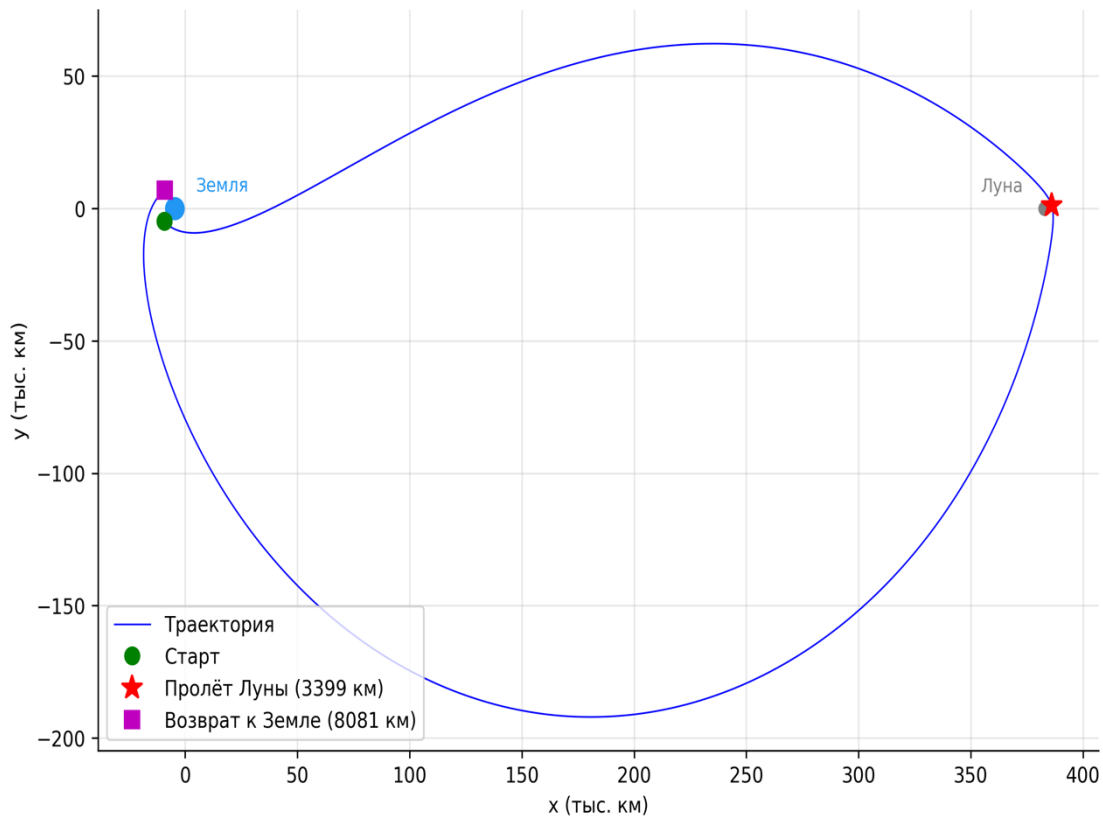
Замыкание

3.6 км

Дрейф Якоби

3.8×10^{-11}

Свободный возврат



Пролёт Луны

3 399 км

Возврат к Земле

8 081 км

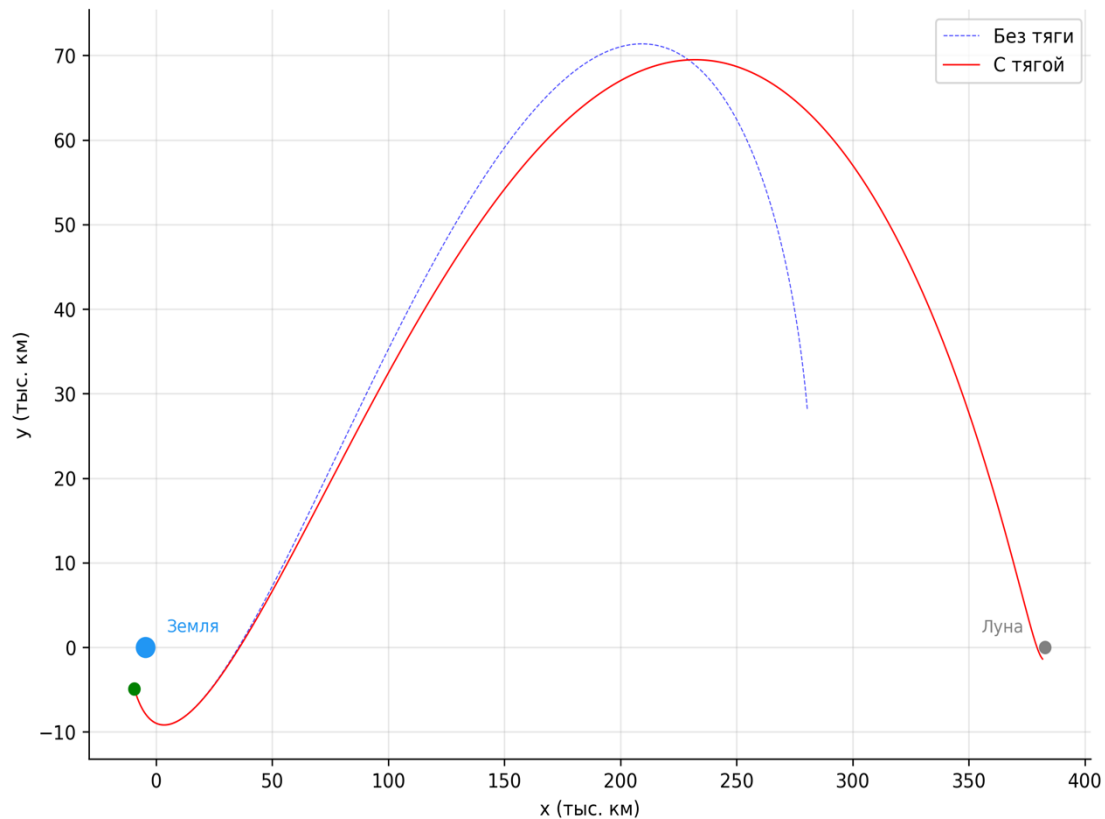
Время полёта

168 ч

+1 м/с → Δ г Луна

+89 км

Перелёт с тягой



Тяга / время

5 Н / 3 ч

Δv

108 м/с

Пролёт Луны

2 494 км

Топливо

18 кг (3.6%)

Сравнение интеграторов

Дрейф интеграла Якоби, гало-орбита L1, dt = 30 с, T = 720 ч

Интегратор	Режим	Макс. дрейф
Эйлер	фикс.	2.2×10^{-6}
Верле полушаг.	фикс.	1.1×10^{-6}
Верле итерир.	фикс.	3.8×10^{-11}

58 000x

по дрейфу Якоби

64 600x

по ошибке позиции

Готовый инструмент для лабораторных

Симулятор готов к использованию в учебном процессе — без установки, в браузере

01

Гало-орбиты

Параметрическое исследование:
период, замыкание, дрейф Якоби

02

Свободный возврат

Чувствительность к начальным условиям, облёт Луны

03

Хаос и Ляпунов

Горизонт предсказуемости, расхождение траекторий

04

Оптимизация тяги

Подбор окна включения двигателя для манёвра

Браузерный доступ · Не требует установки · 7 готовых экспериментов · Открытый код

Технический стек

3D-симулятор

JavaScript · Three.js
HTML · CSS
~1 500 строк

Эксперименты

Python · NumPy
SciPy (RK45 для
валидации)
Matplotlib · 7 скриптов

Деплой

VPS Beget.com
1 vCPU · 1 GB RAM
NVMe SSD · 210 ₽/мес

Инструменты

Git · GitHub
Desmos
(исследование L1–L5)
Python ~2 500 строк

Весь код написан с нуля · Three.js + Python + NumPy · VPS за 210 ₽/мес

Список литературы

- [1] Белецкий В.В. - «Очерки о движении космических тел»
- [2] Дубошин Г.Н. - «Небесная механика. Основные задачи и методы»
- [3] Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г. - «Основы механики космического полёта»
- [4] Целоусова А.А - «Численно-аналитические методы построения траекторий в задачах трёх и четырёх тел»
- [5] Dmitri Rozmanov, Peter G Kusalik - «Robust rotational-velocity-Verlet integration methods»

Эволюция проекта



7 месяцев: от теории до публикации на сайте

Вывод уравнений движения

Система уравнений движения через эффективный потенциал:

$$\Omega(x, y, z) = \frac{1}{2} \omega^2(x^2 + y^2) + \frac{GM_E}{r_E} + \frac{GM_M}{r_M}$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \frac{\partial\Omega}{\partial x}$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \frac{\partial\Omega}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial\Omega}{\partial z}$$

Ω

эфф.
потенциал

ω

угл. скорость

r_e, r_m

до центров
масс

d_e, d_m

от барицентра

G

грав.
постоянная

M_e, M_m

массы тел

$2\omega\dot{y}$ и $-2\omega\dot{x}$ — члены Кориолиса, не входят в Ω