Численное моделирование траекторий в круговой ограниченной задаче трёх тел

системы Земля–Луна

Ключников Александр

Олимпиада «Старт в науку» МФТИ, 2026

Введение в тему

Задача трёх тел

Классическая задача небесной механики. Аналитического решения не существует.

КОЗТТ

Два массивных тела движутся по окружности. Третье тело — малой массы.

Вращающаяся система

Земля и Луна неподвижны. Появляются силы Кориолиса и центробежная.

Круговая ограниченная задача трёх тел — базовая модель для изучения динамики в системе Земля–Луна

Зачем это нужно? Сравнение с аналогами

Инструмент	КОЗТТ	3D	Тяга	Якоби	Веб
GMAT (NASA)	●	●	●	—	—
STK (Ansys/AGI)	—	●	●	—	—
Universe Sandbox	—	●	●	—	—
PhET Simulations	—	—	—	—	●
Desmos	—	—	—	—	●
«Орбита. Челлендж»	—	●	—	—	●
rocketlauncher.space	●	●	●	●	●

Я искал готовый симулятор — и не нашёл. Тогда написал его сам.

rocketlauncher.space

- 3D визуализация системы Земля–Луна
- Двигатель с настройкой окна тяги
- Три интегратора с контролем Якоби
- Точки Лагранжа L1–L5

Цели и задачи

Создание обучающего веб-симулятора траекторий в системе Земля–Луна

1. Изучить теоретические основы КОЗТТ
2. Вывести уравнения движения во вращающейся системе координат
3. Реализовать расчёт траектории методом Эйлера
4. Реализовать метод Верле, сравнить точность с Эйлером
5. Численно найти точки Лагранжа L1–L5
6. Создать интерактивный 3D веб-симулятор

Математическая модель

Уравнения движения во вращающейся системе координат:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y} + \omega^2 x - GM\_E(x+d\_E)/r\_E^3 - GM\_M(x-d\_M)/r\_M^3$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x} + \omega^2 y - GM\_E \cdot y/r\_E^3 - GM\_M \cdot y/r\_M^3$$

$$\ddot{z} = -\ GM\_E \cdot z/r\_E^3 - GM\_M \cdot z/r\_M^3$$

G	**M_E, M_M**	**d_E, d_M**	**r_E, r_M**	**ω**
грав. постоянная	массы тел	от барицентра	до центров масс	угл. скорость

$2\omega\dot{x}$ и $-2\omega\dot{y}$ — сила Кориолиса. Зависит от скорости. Запомните это.

+ модель тяги: постоянная сила F в окне [t_on, t_off]

Область применимости

01

Круговая орбита

Орбита Луны считается круговой
(реальный эксцентриситет = 0.055)

02

Малая масса КА

Масса аппарата пренебрежимо мала
по сравнению с Землёй и Луной

03

Без Солнца

Не учитывается притяжение Солнца и других тел

Модель корректна для качественного изучения динамики и учебных целей

Для реальных миссий используются полные эфемеридные модели

Три интегратора

Метод Эйлера

Простой, порядок $O(h)$.

Не сохраняет энергию.

$O(h)$

Верле стандартный

Симплектический, $O(h^2)$ теор.

Но Кориолис $2\omega\times v$ — $a = f(x,v)$!

Деградация до $O(h)$ в КОЗТТ.

$O(h)$ в КОЗТТ

Верле итерированный

3 итерации за шаг уточняют v.

Восстанавливает порядок $O(h^2)$.

$O(h^2)$

Кориолисова сила $2\omega \times v$ зависит от скорости → стандартный Верле теряет порядок → итерации восстанавливают $O(h^2)$

Интеграл Якоби

Единственная сохраняющаяся величина в КОЗТТ

$$C_J = 2U - V^2$$

Дрейф $e = (C_J(t) - C_J(0)) / C_J(0)$ — мера накопленной ошибки

< 0.001%	< 0.01%	< 0.1%	> 0.1%
Отлично	Хорошо	Допустимо	Плохо

Адаптивный шаг

Вблизи тел 1/r растёт → нужен мелкий шаг

```
dt = dt_max / ( 1 + (v / v_ref) · (dt_max / dt_min − 1) )
```

Далеко от тел

dt = dt_max

Силы малы, шаг максимален

→

Переходная зона

dt уменьшается

пропорционально v

→

Вблизи тела

dt ≈ dt_min

Силы велики, шаг минимален

Сравнение интеграторов

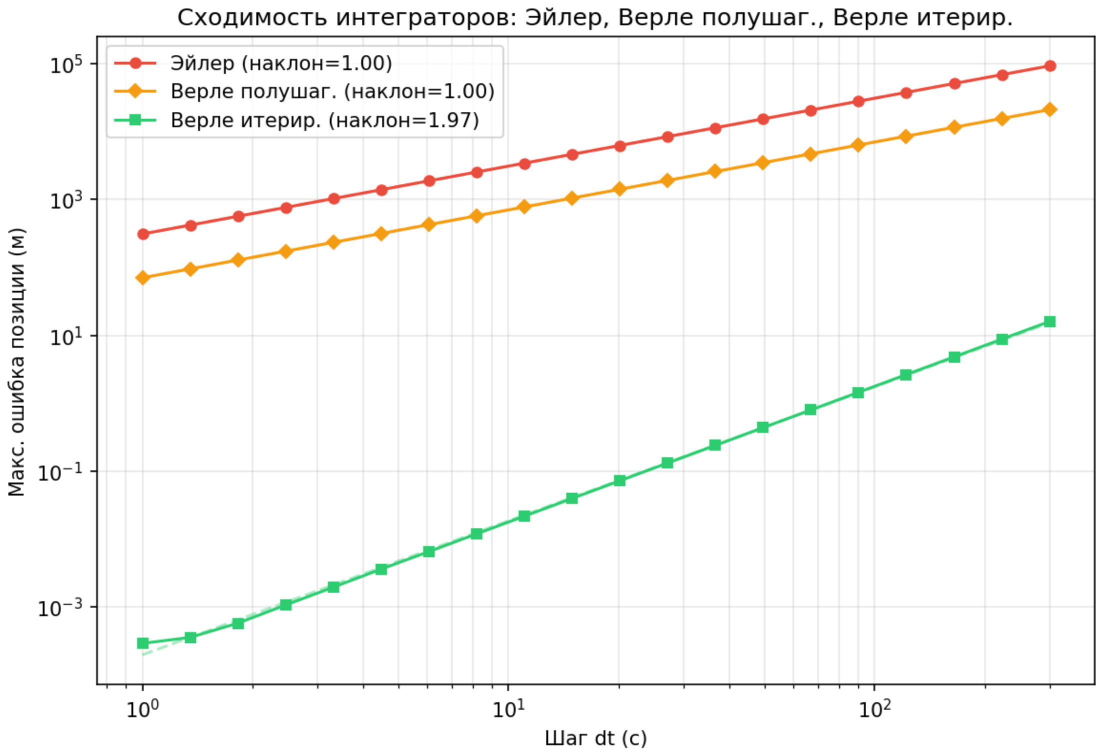
Дрейф интеграла Якоби, гало-орбита L1, dt = 30 с, T = 720 ч

Интегратор	Режим	Макс. дрейф
Эйлер	фикс.	2.2×10^{-6}
Верле полушаг.	фикс.	1.1×10^{-6}
Верле итерир.	фикс.	**3.8×10^{-11}**

58 000×

Итерированный Верле точнее Эйлера по дрейфу Якоби

Log-log сходимость



Эйлер

наклон 1.00 → O(h)

Верле стандарт.

наклон 1.00 → O(h)

Верле итерир.

наклон 1.97 → O(h²)

dt = 30 с

Эйлер: 8 400 м

Верле ст.: 1 900 м

Верле ит.: 0.13 м

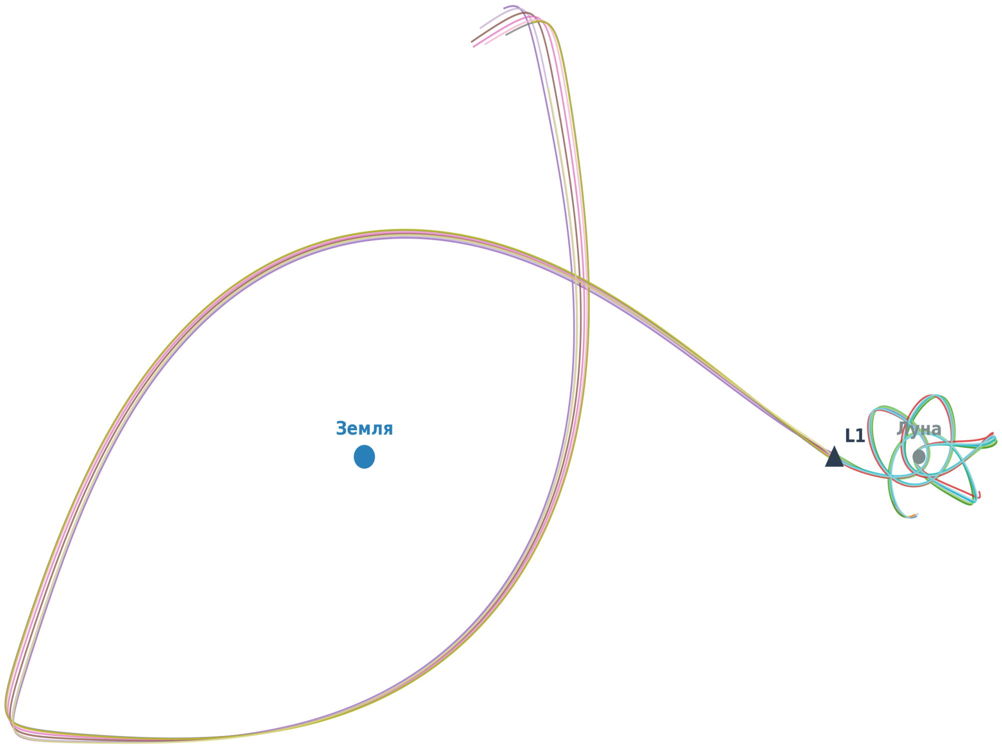
Точки Лагранжа L1–L5

5 точек равновесия системы Земля–Луна

Точка	x, тыс. км	y, тыс. км	Метод	Ост. ускор., м/с²
L1	323 696	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L2	446 531	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L3	−386 651	0	Бисекция	$< 10^{-18}$
L4	188 081	332 925	Ньютон	$< 10^{-18}$
L5	188 081	−332 925	Ньютон	$< 10^{-18}$

График в Desmos → смена знака → бисекция → точность $< 10^{-18}$ м/с²

Хаос у L1



Δv_0

1 м/с

Расхождение

тысячи км

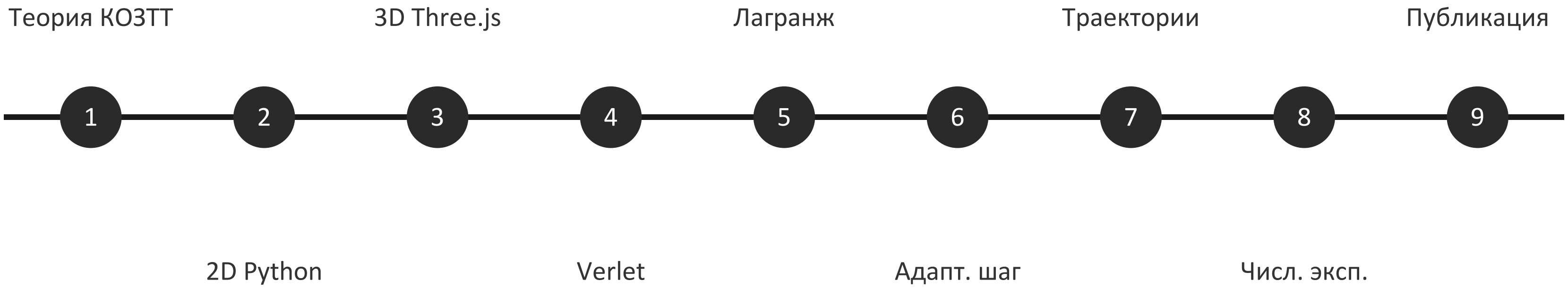
Время

2 недели

Личный вклад

Физика	Вывод уравнений движения КОЗТТ во вращающейся системе координат
Валидация	Вывод и реализация интеграла Якоби как инструмента проверки точности
Числ. методы	3 интегратора; обнаружение деградации Верле и реализация итерированного варианта
Эксперименты	Серия из 7 вычислительных экспериментов для количественной верификации
Алгоритмы	Нахождение точек Лагранжа L1–L5: бисекция + метод Ньютона
Разработка	3D веб-симулятор + скрипты поиска начальных условий — с нуля

Эволюция проекта



15 месяцев: от теории до публикации на сайте — полный цикл разработки

Пути развития

Эллиптическая задача

Учёт эксцентриситета Луны ($e = 0.055$)

Влияние Солнца

Расширение до задачи четырёх тел

Удержание орбиты

Поддержание аппарата вблизи гало-орбиты

Лабораторные работы

Набор заданий на базе симулятора

Выводы

- ✓ Изучены теоретические основы КОЗТТ, выведены уравнения движения
- ✓ Реализованы 3 интегратора; итерированный Верле точнее Эйлера в 58 000× по Якоби и в 49 000× по позиции (dt = 30 с)
- ✓ Точки Лагранжа L1–L5 найдены численно (остаточное ускорение $< 10^{-18}$)
- ✓ Модель верифицирована серией из 7 численных экспериментов: log-log сходимость, дрейф Якоби, сценарные тесты
- ✓ Создан обучающий 3D веб-симулятор, опубликован онлайн

Спасибо за внимание