

План доклада

Численное моделирование траекторий в круговой ограниченной задаче трёх тел системы Земля--Луна

Автор: Ключников Александр
Олимпиада «Старт в науку» МФТИ, 2026

7 минут, 18 слайдов

Слайд 1. Титульный лист

- Название работы, автор, олимпиада

Слайд 2. Введение в тему

- Задача трёх тел: аналитического решения не существует (Пуанкаре)
- Круговая ограниченная задача трёх тел (CR3BP) — модель системы Земля--Луна
- Вращающаяся система координат: Земля и Луна неподвижны

Слайд 3. Актуальность и сравнение с аналогами

- Нет доступного инструмента, сочетающего CR3BP + 3D + тягу + интеграл Якоби
- Сравнение с PhET, Desmos, «Орбита. Челлендж», Universe Sandbox
- Цель: обучающий веб-симулятор траекторий в системе Земля--Луна

Слайд 4. Цели и задачи

- Задача 1: изучить теоретические основы КОЗТТ
- Задача 2: вывести уравнения движения во вращающейся системе координат
- Задача 3: реализовать расчёт траектории методом Эйлера
- Задача 4: реализовать метод Верле, исследовать точность, сравнить с Эйлером
- Задача 5: численно найти точки Лагранжа L1--L5
- Задача 6: создать интерактивный 3D веб-симулятор

Слайд 5. Математическая модель CR3BP

- Уравнения движения: гравитация + центробежная сила + сила Кориолиса
- Параметры модели: массы, расстояния, угловая скорость вращения
- Модель тяги двигателя с временным окном включения

Слайд 6. Область применимости модели

- Допущения: круговая орбита Луны, пренебрежение массой аппарата, без Солнца
- Модель корректна для качественного изучения динамики и учебных целей
- Для реальных миссий используются полные эфемеридные модели

Слайд 7. Методы интегрирования: три подхода

- Метод Эйлера: порядок $O(h)$, не сохраняет фазовый объём
- Velocity Verlet: симплектический, теоретически $O(h^2)$
- Кориолисова сила ($2\mathbf{w} \times \mathbf{v}$) зависит от скорости — стандартный Верле деградирует до $O(h)$ в CR3BP
- Итерированный Верле: 3 итерации за шаг восстанавливают истинный $O(h^2)$

Слайд 8. Интеграл Якоби

- $C_J = 2U - V^2$ — единственная сохраняющаяся величина в CR3BP
- Дрейф интеграла Якоби — мера накопленной численной ошибки
- Цветовая индикация в симуляторе: от зелёного ($< 0.001\%$) до красного ($> 0.1\%$)

Слайд 9. Адаптивный шаг интегрирования

- Автоматическое уменьшение шага dt вблизи массивных тел
- Формула адаптации: dt зависит от скорости аппарата

Слайд 10. Сравнение интеграторов — ключевые результаты

- 6 конфигураций (3 интегратора \times 2 режима шага) на 3 сценариях
- Дрейф Якоби на гало-орбите ($dt=30$ с): Эйлер $2.2e-6$, итерир. Верле $3.8e-11$
- Итерированный Верле точнее Эйлера в 58 000 раз по дрейфу Якоби

Слайд 11. Log-log сходимость интеграторов

- Ошибка позиции vs шаг dt , эталон — решатель высокого порядка (RK45)
- Эйлер: наклон 1.00, Верле полушаг.: 1.00, Верле итерир.: 1.97
- При $dt=30$ с: Эйлер 8400 м, итерированный Верле 0.13 м — разница в 49 000 раз

Слайд 12. Точки Лагранжа L1--L5

- L1, L2, L3 — метод бисекции; L4, L5 — метод Ньютона
- Верификация: остаточное ускорение $< 10^{-18}$ м/с²

Слайд 13. Демонстрация: 4 сценария

- Гало-орбита L1: период 293 ч, замыкание 3.6 км
- Свободный возврат: облёт Луны на 3400 км, возврат за 168 ч
- Хаос у L1: разница 1 м/с -> расхождение на тысячи км
- Перелёт с тягой: 5 Н кардинально меняет траекторию

Слайд 14. Личный вклад

- Вывод уравнений движения CR3BP во вращающейся системе координат
- Вывод и реализация интеграла Якоби как инструмента валидации

- Три интегратора; обнаружение деградации Верле из-за Кориолиса и реализация исправления
- Серия из 7 вычислительных экспериментов для верификации модели
- Веб-симулятор на JavaScript + Three.js и скрипты поиска начальных условий

Слайд 15. Эволюция проекта

- Теория -> 2D-прототип (Python) -> 3D (JavaScript + Three.js)
- Velocity Verlet -> деградация из-за Кориолиса -> итерированный вариант
- 7 экспериментов, адаптивный шаг, публикация онлайн

Слайд 16. Пути развития

- Эллиптическая задача трёх тел (эксцентриситет Луны)
- Влияние Солнца (задача четырёх тел)
- Station-keeping на гало-орбитах
- Набор лабораторных работ на базе симулятора

Слайд 17. Выводы

- Изучены основы КОЗТТ, выведены уравнения движения
- Три интегратора; итерир. Верле точнее Эйлера в 58 000 раз (Якоби) и 49 000 раз (позиция)
- Точки Лагранжа L1--L5 найдены и верифицированы (ост. ускорение $< 10^{-18}$)
- Создан обучающий 3D веб-симулятор, опубликован онлайн

Слайд 18. Спасибо за внимание

- QR-код на симулятор
- Литература